ALGEBRAISCHE STRUKTUREN

ÜBUNGSBLATT 4

1. Man betrachte eine Gruppe $(G, \cdot)$ und zwei Untergruppen $H \leq K \leq G$. Ist es wahr, dass $H \trianglelefteq K$ und $K \trianglelefteq G$ implieziert $H \trianglelefteq G$? Mit anderen Wörter gilt der Transitivität der Relation "Normalteiler sein" auf der Menge der Untergruppen von G?

2. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe.
   a) Sind $H, K \leq G$ so gilt $H \cup K \leq G$ g.d.w. $H \leq K$ oder $K \leq H$.
   b) Man zeige dass ein ahnliches Ergenbniss gilt nicht für drei (oder mehere) Untergruppen. Das heißt, existieren Gruppen so dass sie sich als eine Vereininung von drei Untergruppen, je zwei nicht einander eingeschlossen, geschrieben lassen. geschrieben lassen

3. Man betrachte die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid \det A \neq 0\}$, wobei K einer aus den Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist. Man zeige, dass $\mathrm{SL}_n(K) \trianglelefteq \mathrm{GL}_n(K)$ und $\mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{SL}_n(G) \cong (K^*, \cdot)$, wobei

$$\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid \det A = 1\}.$$

4. Man betrachte die Gruppen $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ und $(\mathbb{R}^*_+ = (0, \infty), \cdot)$. Man zeige, dass $U \trianglelefteq \mathbb{C}^*$ und $\mathbb{C}^*/U \cong \mathbb{R}^*_+$, wobei

$$U = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}.$$

5. Man betrachte die symmetrische Gruppe $(S_n, \cdot)$, wobei $n \in \mathbb{N}^*$. Man zeige, dass $A_n \trianglelefteq S_n$ und $S_n/A_n \cong U_2 = (\{1, -1\}, \cdot)$, wobei

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}.$$

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`